

МИНОБРНАУКИ РОССИИ



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Российский государственный гуманитарный университет»  
**ФГАОУ ВО «РГГУ»**

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ БЕЗОПАСНОСТИ  
Факультет информационных систем и безопасности  
Кафедра фундаментальной и прикладной математики

## **МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ**

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Прикладная математика (бакалавриат) 01.03.04

**Математические основы искусственного интеллекта**

Уровень квалификации выпускника (бакалавр)

Форма обучения (очная)

РПД адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями  
здоровья и инвалидов

**Москва 2026**

*МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ*

Рабочая программа дисциплины

Составитель:

канд. техн. наук, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики

*Клименко А.Б.*

УТВЕРЖДЕНО

Протокол заседания кафедры

фундаментальной и прикладной математики

№ 5 от 19.12.2025

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.   | <u>Пояснительная записка</u> .....   | 4  |
| 1.1. | <u>Цель и задачи дисциплины</u> .....  | 4  |
| 1.2. | <u>Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций</u> .....           | 4  |
| 1.3. | <u>Место дисциплины в структуре образовательной программы</u> .....  | 4  |
| 2.   | <u>Структура дисциплины</u> .....  | 5  |
| 3.   | <u>Содержание дисциплины</u> .....   | 5  |
| 4.   | <u>Образовательные технологии</u> .....  | 6  |
| 5.   | <u>Оценка планируемых результатов обучения</u> .....   | 6  |
| 5.1. | <u>Система оценивания</u> .....  | 6  |
| 5.2. | <u>Критерии выставления оценки по дисциплине</u> .....   | 7  |
| 5.3. | <u>Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине</u> ..... | 7  |
| 6.   | <u>Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины</u> .....   | 9  |
| 6.1. | <u>Список источников и литературы</u> .....  | 9  |
| 6.2. | <u>Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»</u> .....  | 10 |
| 6.3. | <u>Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы</u> .....   | 10 |
| 7.   | <u>Материально-техническое обеспечение дисциплины</u> .....  | 10 |
| 8.   | <u>Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов</u> .....                      | 11 |
| 9.   | <u>Методические материалы</u> .....  | 12 |
| 9.1. | <u>Планы практических занятий</u> .....  | 12 |
|      | <u>Приложение 1. Аннотация рабочей программы дисциплины</u> .....  | 15 |

## 1. Пояснительная записка

### 1.1. Цель и задачи дисциплины

*Цель дисциплины:* формирование базовых представлений в теории графов и возможности таковых для применения к разным типам прикладных задач.

*Задачи дисциплины:* обеспечение подготовки будущих профессионалов к решению стандартных задач теории графов и сетей.

### 1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

| Компетенция<br>(код и наименование)  | Индикаторы компетенций<br>(код и наименование)   | Результаты обучения  |
|--|--|--|
| ОПК-2. Способен обоснованно выбирать, дорабатывать и применять для решения исследовательских и проектных задач математические методы и модели, осуществлять проверку адекватности моделей, анализировать результаты, оценивать надежность и качество функционирования систем | ОПК-2.1. Определяет и анализирует существенные элементы информационных систем.                               | <i>Знать:</i> основные характеристики графов; специальные цепи и циклы в графе; понятие основного дерева в графе; методы подсчета хроматического числа графа.<br><i>Уметь:</i> строить граф по его матрицам смежности или матрице инцидентий и решать обратную задачу; строить циклы специального вида в графе; находить хроматическое число и хроматический многочлен графа.<br><i>Владеть:</i> аппаратом и методами теории графов и комбинаторики для грамотной математической постановки и анализа конкретных задач, возникающих в профессиональной деятельности. |
|  | ОПК-2.2. Осуществляет поиск и применяет программное обеспечение для проведения вычислительных экспериментов. | <i>Знать:</i> основные характеристики графов; специальные цепи и циклы в графе; понятие основного дерева в графе; методы подсчета хроматического числа графа.<br><i>Уметь:</i> строить граф по его матрицам смежности или матрице инцидентий и решать обратную задачу; строить циклы специального вида в графе; находить хроматическое число и хроматический многочлен графа.<br><i>Владеть:</i> аппаратом и методами теории графов и комбинаторики для грамотной математической постановки и анализа конкретных задач, возникающих в профессиональной деятельности. |

### 1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Методы и алгоритмы теории графов» относится к обязательной части блока дисциплин учебного плана.

Для освоения дисциплины необходимы знания, умения и владения, сформированные в ходе изучения следующих дисциплин (модулей): «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия».

В результате освоения дисциплины формируются знания, умения и владения, необходимые для изучения следующих дисциплин: «Математическая теория игр», «Исследование операций», «Методы оптимизации», «Теория систем и системный анализ».

## 2. Структура дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 академических часа.

### Структура дисциплины для очной формы обучения

Объем дисциплины в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

| Семестр | Тип учебных занятий  | Количество часов |
|---------|----------------------|------------------|
| 4       | Лекции               | 24               |
| 4       | Практические занятия | 32               |
| Всего:  |                      | 56               |

Объем дисциплины в форме самостоятельной работы обучающихся составляет 88 академических часов.

## 3. Содержание дисциплины

### Тема 1. Базовые математические понятия. Основные типы графов и способы их задания (матрицы и графы). Операции над графами, изоморфизм графов.

Операции над множествами и их свойства. Декартово произведение множеств.

Матрицы, характеризующие бинарные отношения. Бинарные отношения эквивалентности и порядка. Матрицы, связанные с графами; матрица смежности, инцидентности, расстояний, Кирхгофа, связности (достижимости) и их связь с матрицами бинарного отношения, задающего граф. Операции над графами: операции удаления ребра, введения ребра, удаления вершины, введения вершины в ребро; операция объединения графов, дополнения графов. Изоморфизм графов.

### Тема 2. Движение по графу. Обходы графа (маршруты, циклы, цепи) и типы графов, обусловленные ими (гамильтоновы, эйлеровы, их свойства).

Определение маршрута, циклического маршрута, длины маршрута, цепи, простой цепи, цикла, простого цикла в неорграфе. Теорема о связи маршрута и простой цепи. Теоремы о связи матрицы смежности и числа маршрутов определенной длины. Путь, контур, понятие достижимости в орграфе.

Понятие связного неорграфа связного орграфа, сильно связного орграфа. Теоремы о представлении графа в виде объединения непересекающихся связных компонент. Расстояние между вершинами. Матрицы связности, достижимости, контрдостижимости. Диаметр графа. Цикл, эйлеров цикл, эйлерова цепь, эйлеров граф.

Условие эйлеровости графа, мультиграфа. Алгоритм Флери построения эйлеровой цепи. Определение гамильтонова цикла, гамильтоновой цепи, гамильтонова графа.

### Тема 3. Теорема Жордана. Правильная раскраска графа. Графы типа «дерево» («лес»).

Понятие жордановой кривой. Формулировка теоремы Жордана. Определение плоского и планарного графа. Задача о трех колодцах и трех домах. Графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  не являются планарными. Теорема Понтрягина-Куратовского (формулировка). Теорема Эйлера. Полный граф. Граф-«дерево», граф – «лес».

#### Тема 4. Оптимизационные задачи на графах. Двудольные графы, паросочетания.

Алгоритм построения минимального остовного дерева в графе.

Постановка задачи о поиске кратчайшего пути в графе и ее решение.

Постановка задачи о нахождении максимального потока в графе и ее решение.

Методы сетевого планирования. Двудольные графы, их свойства, паросочетания.

Задачи голосования и их представления при помощи графов.

#### 4. Образовательные технологии

Для проведения *занятий лекционного типа* по дисциплине применяются такие образовательные технологии как традиционная лекция, лекция-визуализация с применением слайд-проектора. Для проведения *практических занятий* используются такие образовательные технологии как: решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

В рамках *самостоятельной работы* студентов проводится консультирование и проверка домашних заданий посредством электронной почты.

В период временного приостановления посещения обучающимися помещений и территории РГГУ для организации учебного процесса с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий могут быть использованы следующие образовательные технологии:

- видео-лекции;
- онлайн-лекции в режиме реального времени;
- электронные учебники, учебные пособия, научные издания в электронном виде и доступ к иным электронным образовательным ресурсам;
- системы для электронного тестирования;
- консультации с использованием телекоммуникационных средств.

#### 5. Оценка планируемых результатов обучения

##### 5.1 Система оценивания

| Форма контроля  | Макс. количество баллов |            |
|---|-------------------------|------------|
|   | За одну работу          | Всего      |
| Текущий контроль:<br>- контрольная работа (темы 1- 4)               | 15 баллов               | 60 баллов  |
| Промежуточная аттестация – экзамен<br>(Итоговая контрольная работа) |                         | 40 баллов  |
| <b>Итого за семестр</b>   |                         | 100 баллов |

Полученный совокупный результат конвертируется в традиционную шкалу оценок и в шкалу оценок Европейской системы переноса и накопления кредитов (European Credit Transfer System; далее – ECTS) в соответствии с таблицей:

| 100-балльная шкала | Традиционная шкала  |            | Шкала ECTS |
|--------------------|---------------------|------------|------------|
| 95 – 100           | отлично             | зачтено    | A          |
| 83 – 94            |                     |            | B          |
| 68 – 82            | хорошо              |            | C          |
| 56 – 67            | удовлетворительно   |            | D          |
| 50 – 55            |                     |            | E          |
| 20 – 49            | неудовлетворительно | не зачтено | FX         |

|        |  |   |
|--------|--|---|
| 0 – 19 |  | F |
|--------|--|---|

## 5.2 Критерии выставления оценки по дисциплине

| Баллы/<br>Шкала<br>ECTS | Оценка по<br>дисциплине  | Критерии оценки результатов обучения по дисциплине  |
|-------------------------|--------------------------|---|
| 100-83/<br>A,B          | отлично                  | <p>Выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил теоретический и практический материал, может продемонстрировать это на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся исчерпывающе и логически стройно излагает учебный материал, умеет увязывать теорию с практикой, справляется с решением задач профессиональной направленности высокого уровня сложности, правильно обосновывает принятые решения.</p> <p>Свободно ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «высокий».</p>                                   |
| 82-68/<br>C             | хорошо                   | <p>Выставляется обучающемуся, если он знает теоретический и практический материал, грамотно и по существу излагает его на занятиях и в ходе промежуточной аттестации, не допуская существенных неточностей.</p> <p>Обучающийся правильно применяет теоретические положения при решении практических задач профессиональной направленности разного уровня сложности, владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Достаточно хорошо ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «хороший».</p>                                       |
| 67-50/<br>D,E           | удовлетво-<br>рительно   | <p>Выставляется обучающемуся, если он знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает отдельные ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает определённые затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, владеет необходимыми для этого базовыми навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует достаточный уровень знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «достаточный».</p> |
| 49-0/<br>F,FX           | неудовлет-<br>ворительно | <p>Выставляется обучающемуся, если он не знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает грубые ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает серьёзные затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, не владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует фрагментарные знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции на уровне «достаточный», закреплённые за дисциплиной, не сформированы.</p>               |

## 5.3 Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

### Текущий контроль

**Примерный вариант контрольной работы по теме 1:**

- Нарисовать граф Петерсена.
- Построить графы, которые описываются следующими матрицами инцидентности
 

|                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{A}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\mathfrak{A}$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\zeta_0$      | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\zeta_1$      | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\zeta_0$      | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $\zeta_0$      | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\zeta_1$      | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\zeta_0$      | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\zeta_0$      | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\zeta_0$      | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
- Доказать, что в любом графе число нечетных вершин четно.

**Примерный вариант контрольной работы по теме 2:**

- Сформулировать условие эйлеровости графа, мультиграфа, алгоритм Флери построения эйлеровой цепи.
- Дать определение гамильтонова цикла, гамильтоновой цепи, гамильтонова графа. Каковы условия гамильтоновости графа? Привести три примера.
- Построить граф с 6 вершинами, который имеет эйлеров цикл, но не имеет гамильтонова цикла.
- Для связного графа тогда и только тогда существует цепь из  $v_i$  в  $v_j$ , содержащая все его ребра в точности по одному разу, когда эти  $v_i, v_j$  -единственные в этом графе вершины нечетной степени.  
Нарисовать графы, являющиеся простыми цепями  $P_2, P_3, P_4, P_5$ , где  $P_k$  -простая цепь с  $k$  вершинами.
- Найдите циклы длины 5,6,8,9 в графе Петерсена.

**Примерный вариант контрольной работы по теме 3:**

- Определение плоского и планарного графа. Привести по три примера таких графов.
- Сформулировать задача о трех колодцах и трех домах.
- Сформулировать понятие связного неорграфа связного орграфа, сильно связного орграфа. Привести по три примера таких графов. Сформулировать теоремы о представлении графа в виде объединения непересекающихся связных компонент. 4.Матрица связности, достижимости: дать определение, привести по два примера графа и его матрицы связности или достижимости.
- Нарисовать графы  $K_1, K_2, K_3, K_4$

**Примерный вариант контрольной работы по теме 4:**

- Привести пример графа-сети и описать алгоритм Флойда, позволяющий находить кратчайшие пути между любыми двумя узлами сети.
- Дать определения двудольного графа. Сформулировать теорему Кенига о признаке двудольного графа.
- Докажите, что в любом непустом регулярном двудольном графе число вершин в обеих долях одно и то же.
- Докажите, что  $n$  - вершинный граф, число ребер в котором больше, чем  $\frac{n^2}{4}$ , не является двудольным.

5. Докажите, что каждое дерево является двудольным графом. Какие полные двудольные графы являются деревьями?

### Промежуточная аттестация (экзамен)

#### Вариант итоговой контрольной работы:

1. Описать матрицы, связанные с графами; матрица смежности, инцидентности, расстояний, Кирхгофа, связности (достижимости) и их связь с матрицами бинарного отношения, задающего граф.

2. Даны множества  $W = \{a, b, c, d, e, i, f, h, m, p, q, u, v, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, *, \text{A}, a, b, g, L, X, S, D\}$ , и его подмножества

$$B = \{c, a, d, n, p, q, 0, 2, 10, 14, *, L, D\}, \quad U = \{e, a, d, i, p, v, 10, 2, 12, *, a, b, X, D\}.$$

$$C = \{a, d, i, p, h, 0, 2, 12, 14, *, \text{A}, b, L, S, D\}$$

Выписать множества:  $U \subset B, \bar{B}, C \subset B \subset U, C \in B, U \setminus (B \subset C), \overline{B \in C}$ .

3. Задан неорграф, у которого множество вершин  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  и множество ребер  $N = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$ . Матрица смежности имеет вид

$$\begin{array}{cccccc} \in & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ddot{\circ} \\ \subset & & & & & & \vdots \\ \subset & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \subset & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \subset & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots \\ \subset & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \emptyset \end{array} \quad \text{матрица инцидентности такова:} \quad \begin{array}{cccccc} \in & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ddot{\circ} \\ \subset & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \subset & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots \\ \subset & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots \\ \subset & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \subset & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \emptyset \end{array}$$

Нарисовать граф, определить степени вершин. Является ли этот граф эйлеровым? Гамильтоновым?

4. Докажите, что каждое дерево является двудольным графом. Какие полные двудольные графы являются деревьями?

5. Построить граф с 6 вершинами, который

1) имеет гамильтонов цикл, но не имеет эйлера цикла.

2) имеет эйлеров цикл, но не имеет гамильтонова цикла.

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 6.1 Список источников и литературы

#### Литература

##### Основная

1. Судоплатов С. В. Элементы дискретной математики: учебник. - М.: Инфра-М, 2003. - 279 с.
2. Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О. Е. Акимов. - Изд. 2-е, доп. - М.: Лаб. базовых знаний, 2003. - 376 с.
3. Алескерев Ф. Т. Бинарные отношения, графы и коллективные решения: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям "Экономика", "Менеджмент", "Бизнес-информатика", "Государственное и муниципальное управление" и специальности "Логистика" / Ф. Т. Алескерев, Э. Л. Хабина, Д. А. Шварц. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Москва : Физматлит, 2017. - 341 с.
4. Клековкин, Г. А. Геометрическая теория графов: учебное пособие для вузов / Г. А. Клековкин, Л. П. Коннова, В. В. Коннов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва :

- Издательство Юрайт, 2023. — 240 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04812-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL:
5. Иванов, Б. Н. Дискретная математика и теория графов : учебное пособие для вузов / Б. Н. Иванов. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 177 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-14470-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/520078> (дата обращения: 06.06.2023).
6. Клековкин, Г. А. Геометрическая теория графов : учебное пособие для вузов / Г. А. Клековкин, Л. П. Коннова, В. В. Коннов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 240 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04812-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/539439> (дата обращения: 01.04.2024).
7. Иванов, Б. Н. Дискретная математика и теория графов : учебное пособие для вузов / Б. Н. Иванов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 177 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-14470-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/544302> (дата обращения: 01.04.2024).

#### Дополнительная

1. Гаврилов Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике/ Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. - Изд. 3-е, перераб. - М.: Физматлит, 2009. - 416 с.
2. Клековкин, Г. А. Теория графов. Среда *MaXMa*: учебное пособие для вузов / Г. А. Клековкин. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 133 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10084-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/514848> (дата обращения: 06.06.2023).
3. Дискретная математика: прикладные задачи и сложность алгоритмов: учебник и практикум для вузов / А. Е. Андреев, А. А. Болотов, К. В. Коляда, А. Б. Фролов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 317 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04246-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/514434> (дата обращения: 06.06.2023).
4. Song, Daeun & Lim, Eunjung & Park, Jiyeon & Jung, Minjung & Kim, Young. (2022). TSP-Bot: Robotic TSP Pen Art using High-DoF Manipulators. — URL: [https://www.researchgate.net/publication/364442964\\_TSP-Bot\\_Robotic\\_TSP\\_Pen\\_Art\\_using\\_High-DoF\\_Manipulators](https://www.researchgate.net/publication/364442964_TSP-Bot_Robotic_TSP_Pen_Art_using_High-DoF_Manipulators) (дата обращения: 06.06.2023)
5. MaHa, Al-Furhud & Ahmed, Zakir. (2020). Genetic Algorithms for the Multiple Travelling Salesman Problem. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 11. 553-560. 10.14569/IJACSA.2020.0110768. — URL: [https://www.researchgate.net/publication/343350213\\_Genetic\\_Algorithms\\_for\\_the\\_Multiple\\_Travelling\\_Salesman\\_Problem](https://www.researchgate.net/publication/343350213_Genetic_Algorithms_for_the_Multiple_Travelling_Salesman_Problem) (дата обращения: 06.06.2023)

## 6.2 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет».

Электронная библиотека для вузов и ссузов.- [biblio-online.ru](http://biblio-online.ru)  
 Национальная электронная библиотека (НЭБ) [www.rusneb.ru](http://www.rusneb.ru)  
 ELibrary.ru Научная электронная библиотека [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)

## 6.3 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

Доступ к профессиональным базам данных: <https://liber.rsu.ru/ru/bases>

Информационные справочные системы:

1. Консультант Плюс

## 2. Гарант

### 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для обеспечения дисциплины используется материально-техническая база образовательного учреждения: учебные аудитории, оснащённые доской, компьютером или ноутбуком, проектором (стационарным или переносным) для демонстрации учебных материалов.

Состав программного обеспечения:

1. Windows
2. Microsoft Office
3. Kaspersky Endpoint Security

### 8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- для слепых и слабовидящих: лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением; письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или могут быть заменены устным ответом; обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств; письменные задания оформляются увеличенным шрифтом; экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

- для глухих и слабослышащих: лекции оформляются в виде электронного документа, либо предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования; письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме; экзамен и зачёт проводятся в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.

- для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением; письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением; экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения предусматривается использование технических средств, необходимых в связи с индивидуальными особенностями обучающихся. Эти средства могут быть предоставлены университетом, или могут использоваться собственные технические средства.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- для слепых и слабовидящих: в печатной форме увеличенным шрифтом, в форме электронного документа, в форме аудиофайла.
- для глухих и слабослышащих: в печатной форме, в форме электронного документа.
- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме, в форме электронного документа, в форме аудиофайла.

Учебные аудитории для всех видов контактной и самостоятельной работы, научная библиотека и иные помещения для обучения оснащены специальным оборудованием и учебными местами с техническими средствами обучения:

- для слепых и слабовидящих: устройством для сканирования и чтения с камерой SARA CE; дисплеем Брайля PAC Mate 20; принтером Брайля EmBraille ViewPlus;
- для глухих и слабослышащих: автоматизированным рабочим местом для людей с нарушением слуха и слабослышащих; акустический усилитель и колонки;
- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата: передвижными, регулируемые эргономическими партами СИ-1; компьютерной техникой со специальным программным обеспечением.

## 9. Методические материалы

### 9.1 Планы практических занятий

#### Тема 1. Базовые математические понятия. Основные типы графов и способы их задания (матрицы и графы). Операции над графами, изоморфизм графов.

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

*Примерные задачи для решения в аудитории:*

1. Привести примеры графов. Вычисление степени вершины.

2. Дано множество  $A = \{a, b, m\}$ , построить  $A' A$ . Введем на множестве  $A' A$  бинарные отношения  $r, a$  в виде пар:

$$r = \{ (a,b), (a,m), (a,a), (b,m), (b,a), (m,a) \}$$

$$a = \{ (a,b), (a,m), (a,a), (m,m), (m,a), (m,b), (b,a), (b,m), (b,b) \}$$

Относительно каждого из бинарных отношений указать, какими из свойств симметричности, рефлексивности, транзитивности они обладают.

3. Известно, что граф можно задать бинарным отношением. Какими свойствами обладает граф, если задающее его бинарное отношение

а) рефлексивно, б) симметрично, в) антирефлексивно, г) антисимметрично?

4. Докажите, что ациклический граф, содержащий  $n$  вершин и  $k$  компонент, имеет  $n-k$  ребер.

*Контрольные вопросы:*

1. Перечислить способы задания графов, привести примеры.

2. Дать определение изоморфных графов.

3. Задание бинарного отношения на множестве  $A$  Примеры. Свойства бинарных отношений (рефлексивность, симметричность, транзитивность) Изображения бинарных отношений в графическом виде. Матрицы, характеризующие бинарные отношения.

Бинарные отношения эквивалентности и порядка. Примеры таких бинарных отношений.

4. Дать определения полного графа, регулярного графа, Платонова графа, двудольного графа.

5. Свойства регулярного графа и связь его с полным графом. Теорема Кенига о признаке двудольного графа. (в двудольном графе нет циклов нечетной длины или нет простых циклов нечетной длины.)

6. Привести примеры графов и орграфов и всевозможных матриц (смежности, инцидентности, Кирхгофа), описывающих их свойства.

7. Степень вершины (в том числе изолированная вершина, концевая или висячая вершина). Лемма о «рукопожатиях» и ее следствие
8. Матрицы, связанные с графами; матрица смежности, инцидентности, расстояний, Кирхгофа, связности (достижимости) и их связь с матрицами бинарного отношения, задающего граф.

**Тема 2. Движение по графу. Обходы графа (маршруты, циклы, цепи) и типы графов, обусловленные ими (гамильтоновы, эйлеровы), их свойства.**

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

*Примерные задачи для решения в аудитории:*

1. Построить граф с 6 вершинами, который имеет эйлеров цикл, но не имеет гамильтонова цикла
2. Докажите, что в любом связном графе каждые две простые цепи наибольшей длины, имеют общую вершину.
3. Для связного графа тогда и только тогда существует цепь из  $V_i$  в  $V_j$ , содержащая все его ребра в точности по одному разу, когда эти  $V_i, V_j$  – единственные в этом графе вершины нечетной степени.

4. Задан неорграф, у которого множество вершин  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  и множество ребер  $N = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$ . Матрица смежности имеет вид

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} \infty \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \ddot{0} \\ \div \\ \div \\ \div \\ \div \\ \div \\ \div \\ \div \\ \emptyset \end{array}
 \end{array}
 \quad \text{матрица инцидентности такова:}
 \quad
 \begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} \infty \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \\ \zeta \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \ddot{0} \\ \div \\ \div \\ \div \\ \div \\ \div \\ \div \\ \div \\ \emptyset \end{array}
 \end{array}$$

Нарисовать граф, определить степени вершин. Является ли этот граф эйлеровым? Гамильтоновым?

*Контрольные вопросы:*

1. Описать граф-дерево. Доказать эквивалентность шести свойств графа-дерево. К чему приводит удаление существенного ребра графа? Определить остовное дерево графа и привести примеры.
2. Сформулировать условие эйлеровости графа, мультиграфа. Описать алгоритм Флери построения Эйлеровой цепи.
3. Дать определение связного графа, расстояния в графе.
4. Каковы свойства гамильтонова цикла? Гамильтонова графа? Теорема Дирака.
5. Свойства регулярного графа и связь его с полным графом. Теорема Кенига о признаке двудольного графа (в двудольном графе нет циклов нечетной длины или нет простых циклов нечетной длины.)
6. Указать различие между понятиями; маршрут, цепь, простая цепь, цикл, простой цикл, гамильтонова цепь, эйлерова цепь.
7. Понятие связного неорграфа связного орграфа, сильно связного орграфа. Теоремы о представлении графа в виде объединения непересекающихся связных компонент. Расстояние между вершинами. Матрицы связности, достижимости.

**Тема 3. Теорема Жордана. Правильная раскраска графа. Графы типа «дерево» («лес»).**

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

*Примерные задачи для решения в аудитории:*

1. Граф-«дерево», построение остовного дерева. Взвешенный граф, вес маршрута, переход к понятию сети. Построение цикла, остовного дерева.

3. Нарисовать графы  $K_1, K_2, K_3, K_4$ .

*Контрольные вопросы:*

1. Дать определение жордановой кривой, сформулировать теорему Жордана. Привести определение плоского и планарного графа и примеры таких графов. Привести примеры непланарных графов. Признак планарности графа (теорема Понтрягина-Куратовского).
2. Описать граф-дерево. Доказать эквивалентность шести свойств графа-дерево. К чему приводит удаление существенного ребра графа? Определить остовное дерево графа и привести примеры.
3. Что такое правильная раскраска графа? Хроматическое число графа? Примеры раскраски графа и графов с хроматическим числом 1, 2, 3. Соотношение между степенями вершин графа и хроматическим числом. Гипотеза 4 красок.

**Тема 4.** Оптимизационные задачи на графах. Двудольные графы, паросочетания.

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

*Примерные задачи для решения в аудитории:*

1. На прилагаемом рисунке показана транспортная сеть, состоящая из 5 городов (расстояния между городами=вершинами сети приведены на дугах сети) Найти кратчайшие расстояния от города 1 до всех остальных 4-х городов.
2. На приведенном рисунке сети построить максимальный поток.
3. Водитель ездит из дома (Д) на работу (Р) по самому короткому маршруту среди возможных по приведенной на рис. схемы дорог. Но при этом его часто штрафуют за превышение скорости, поэтому самым оптимальным маршрутом является не самый короткий, а самый коммерчески безопасный. На второй схеме приведены вероятности события  $A=$  (быть оштрафованным на каждом участке дороги). Наряды ГИБДД занимают свои позиции случайным образом, не согласовывая их друг с другом. Построить самый оптимальный маршрут от Д до Р.

*Построение минимальной сети.*

4. На прилагаемом рисунке указаны расстояния между платформами, добывающими газ в открытом море, и приемным пунктом на берегу. Платформа 1 –самая близкая к берегу и оснащена необходимым для перекачки газа от других платформ к ней и к приемному пункту оборудованием. Нужно спроектировать сеть трубопроводов минимальной длины, соединяющей платформу 1 и остальные платформы.

Предположим, что в предыдущей задаче все платформы разбиты на 2 группы в зависимости от давления газа в скважинах: к группе платформ с высоким давлением газа относятся 2,3,4 и 6 платформы, а с низким давлением газа -5,7,8,9. Из-за разницы в давлении газопроводы от платформ разных групп нельзя соединять между собой, но можно присоединять их к платформе 1. Построить минимальную сеть газопроводов.

5. Освоение алгоритма поиска кратчайшего пути.

Рассмотреть задачи распределения ресурсов, поиск кратчайших маршрутов. Практическая задача о построении максимального потока нефти между источниками нефти и нефтеперегонными заводами. Переход к математической модели этой задачи. Разрезы и их пропускные способности в сети. Алгоритм построения максимального потока в сети. Обсудить основы сетевого планирования.

6. Бинарные отношения порядка и их представление в помощь графов. Мажоритарный граф. Задачи голосования и мажоритарные графы – примеры. Устойчивость на графе и ядро графа. Примеры. Функция выбора – примеры.

*Контрольные вопросы:*

1. Дать определение разреза в графе и пропускной способности разреза. Сформулировать теорема Форда-Фалкерсона.
2. На приведенном Вами примере провести алгоритм построения минимального остовного дерева.



**АННОТАЦИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Дисциплина «Методы и алгоритмы теории графов» реализуется на факультете информационных систем и безопасности кафедрой фундаментальной и прикладной математики.

Цель дисциплины: формирование базовых представлений в теории графов и возможности таковых для применения к разным типам прикладных задач.

Задачи: обеспечение подготовки будущих профессионалов к решению стандартных задач теории графов и сетей.

Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций:

ОПК-2. Способен обоснованно выбирать, дорабатывать и применять для решения исследовательских и проектных задач математические методы и модели, осуществлять проверку адекватности моделей, анализировать результаты, оценивать надежность и качество функционирования систем.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

*Знать:* основные характеристики графов; специальные цепи и циклы в графе; понятие основного дерева в графе; методы подсчета хроматического числа графа.

*Уметь:* строить граф по его матрицам смежности или матрице инцидентий и решать обратную задачу; строить циклы специального вида в графе; находить хроматическое число и хроматический многочлен графа.

*Владеть:* аппаратом и методами теории графов и комбинаторики для грамотной математической постановки и анализа конкретных задач, возникающих в профессиональной деятельности.

По дисциплине предусмотрена промежуточная аттестация в форме экзамена.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

**ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ<sup>1</sup>**

| № | Текст актуализации или прилагаемый к РПД документ, содержащий изменения | Дата | № протокола |
|---|---|------|-------------|
|   |   |      |             |

---

<sup>1</sup> Для ОП ВО магистратуры изменения только за 2020 г.